Pauta.

Prof. N. Aguilera

Viernes 30 de Abril

Taller 1 Cálculo II(220132)

ALUMNO:_____ **RUT:** _____ **SECCION:** _____

RESULTADOS DE APRENDIZAJES

Aplica la integral de una función de variable real para resolver problemas del ámbito de la Ingeniería.

INSTRUCCIONES

- Escribir sus respuestas con letra clara y legible con lapiz pasta.
- Las respuestas deben venir debidamente justificada.**Identificando claramente los pasos desarrollados.**
- Cada una las hojas de respuestas debe venir con **Nombre, rut** y número de la pregunta.
- Al enviar la resolución de la evaluación, esta debe venir en un archivo pdf, de la siguiente forma: $NombreApellidos - T1.pdf$
- Tiene 60 minutos para responder + 15 minutos para el envio de archivo.
- Entregar al correo del profesor.
- Para cada problema considere k como la suma entre el quinto dígito del rut de los integrantes del grupo.
- En caso de realizar el taller de forma individual considere para k el quinto dígito de su rut + 3.

Considere la siguiente suma para el desarrollo del problema

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Indicación: antes de comenzar el desarrollo debe reemplazar el valor numérico de k.

Ejercicio 1. **60 puntos**

Calcule el área bajo la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = kx^2 + (k-5)^2x + 2$$

del primer cuadrante en el intervalo $[0, k]$ a través de la suma de Riemann y luego usando el Teorema Fundamental del Cálculo. Concluya que ambos resultados son iguales y grafique el área a calcular en el plano cartesiano indicando los elementos que la componen. (Ayuda: $\Delta x = \frac{k}{n}$ y $x_i = \frac{ki}{n}$)

Departamento de Matemática - Universidad del Bío-Bío - 2021

Desarrollo.

Primero a través de la integral de Riemann.

Como $f(x) = Kx^2 + (K-5)^2 x + 2$ y $x \in [0, K]$

Tenemos que $\Delta x = \frac{K}{n}$ y $x_i = \frac{Ki}{n}$, así,

$$f(x_i) = f\left(\frac{Ki}{n}\right) = \frac{K^3 i^2}{n^2} + (K-5)^2 \frac{Ki}{n} + 2.$$

Luego, $$f(x_i) \cdot \Delta x = \left(\frac{K^3 i^2}{n^2} + (K-5)^2 \frac{Ki}{n} + 2\right) \cdot \frac{K}{n}$$

Sumando $i=1$ hasta $i=n$,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{K}{n}\left(\frac{K^3}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(K-5)^2 K}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2n\right)$$

$$= \frac{K}{n}\left(\frac{2K^3n^3 + 3K^3n^2 + K^3 n}{6n^2} + \frac{(K-5)^2 Kn + (K-5)^2 K}{2} + 2n\right)$$

$$= \frac{K^4}{3} + \frac{K^4}{2n} + \frac{K^4}{n^2} + \frac{K^2(K-5)^2}{2} + \frac{K^2(K-5)^2}{2n} + 2K$$

haciendo $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{K^4}{3} + \frac{K^4}{2n} + \frac{K^4}{n^2} + \frac{K^2(K-5)^2}{2} + \frac{K^2(K-5)^2}{2n} + 2K\right]$$

$$= \frac{k^4}{3} + \frac{k^2(k-5)^2}{2} + 2k$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = \frac{k^4}{3} + \frac{k(k-5)^2}{2} + 2k.$$

Por lo tanto el área bajo f con $x \in [0,k]$ es

$$\frac{k^4}{3} + \frac{k(k-5)^2}{2} + 2k. \ [u^2].$$ 25 pts

Por otra parte, integrando y usando el T.F.C.:

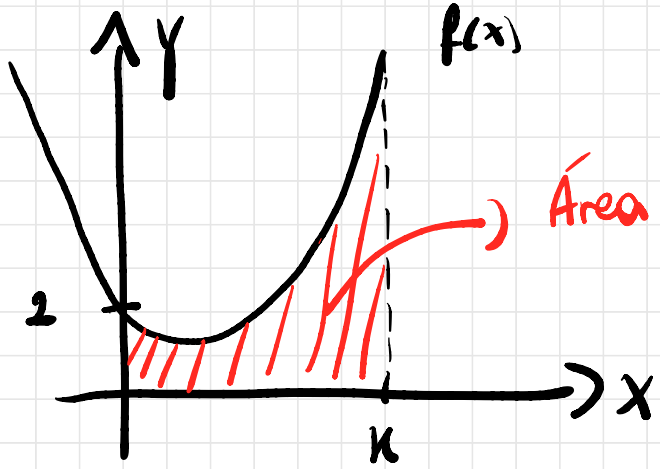
$$\int_0^k f(x)\,dx = \int_0^k \left(kx^2 + (k-5)^2 x + 2\right) dx$$

$$= \left[\frac{kx^3}{3} + \frac{(k-5)^2 x^2}{2} + 2x\right]\Bigg|_0^k$$ 25 pts

$$\therefore \int_0^k f(x)\,dx = \frac{k^4}{3} + \frac{k^2(k-5)^2}{2} + 2k. \ [u^2]$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = \int_0^k f(x)\,dx.$$ 5 pts



Área hallada.

5pts